

תרגיל 4 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. צייר את תמונת הפונקציה $f(z) = e^z$ כאשר:
 - (א) $\operatorname{Re}(z)$ קבוע ו- $\operatorname{Im}(z)$ משתנה.
 - (ב) $\operatorname{Im}(z)$ קבוע ו- $\operatorname{Re}(z)$ משתנה.
 - (ג) z משתנה לאורך ישר.
2. נתונה העתקה $f(z) = \frac{1}{z}$. מה היא התמונה תחת ההעתקה של:
 - (א) המעגל $S_a = \{z \mid |z|^2 = a \cdot \operatorname{Re}(z)\}$, עבור $a \in \mathbb{R}$ כלשהו.
 - (ב) הישר $L_b = \{z \mid \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) + b\}$, עבור $b \in \mathbb{R}$ כלשהו.
3. הוכח את התכונות הבאות:
 - (א) יהיו $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ מסילות, כך ש $\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma_3 \sim \gamma_4$ ונניח כי $\gamma_1\gamma_3 \sim \gamma_2\gamma_4$ הוכח כי $\gamma_1(1) = \gamma_3(0), \gamma_2(1) = \gamma_4(0)$
 - (ב) נניח כי $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ הוכח כי $\int_{\gamma_1\gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
 - (ג) הוכח כי לכל זוג קבועים $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$: $\int_{\gamma} \lambda f + \mu g dz = \lambda \int_{\gamma} f dz + \mu \int_{\gamma} g dz$
4. חשב את האינטגרל של הפונקציות הבאות לאורך מסילה המתארת את המעגל $\{z \mid |z| = 2\}$ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון)
 - (א) $z + \bar{z}$
 - (ב) $z^2 - 2z + 3$
 - (ג) z^{-4}
 - (ד) $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)$
5. חשב את האינטגרלים הממשיים הבאים:
 - (א) $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt$
 - (ב) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$
6. תהא γ_r מסילה המתארת מעגל ברדיוס $r \notin \{1, 3\}$ סביב $2i$ חשב את האינטגרל $\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2 + 1}$ כפונקציה של r .
7. חשב את האינטגרלים הבאים:
 - (א) $\int_{\gamma_1} |z^2| dz$ כאשר $\gamma_1(t) = t + it^2, t \in [0, 1]$
 - (ב) $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}$ כאשר $\gamma_2(t) = \cos(2t) + i(\sin(2t) + \frac{1}{2}), t \in [0, 2\pi]$